9.1.13 Permutace s opakováním

Předpoklady: 9106, 9112

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny přesahuje 45 minut, pokud nemáte k dispozici další půlhodinu, musíte žáky nechat projít poslední dva příklady doma.

Př. 1: Urči, kolik různých „slov“ je možné vytvořit přemísťováním písmen slova KAJAK (za slovo považujeme jakékoliv seskupení písmen slova KAJAK).

Slovo má 5 písmen $\Rightarrow$ vyrábíme různá pořadí z pěti prvků $\Rightarrow$ permutace (je to i v nadpisu).
Problém: Není tak úplně pravda, že máme 5 prvků, protože dvě písmena se ve slově vyskytují dvakrát a jejich prohozením se nic nezmění (a tedy ani nevytvoří nové slovo).
Řešení: Písmena ve slově si oindexujeme (pak budou rozlišitelná) $\Rightarrow$ $K_1A_1JA_2K_2$ $\Rightarrow$ $5!$ možností.
Jak se počet možností změní, když indexy zrušíme?

- Například slova: $K_1A_1JA_2K_2$ a $K_2A_1JA_2K_1$ budou stejná $\Rightarrow$ ze dvou slov máme jediné. Stejným způsobem se počet slov zmenší i v dalších případech: vzájemné prohození písmen K_1 a K_2 nezpůsobí vznik nového slova $\Rightarrow$ po zrušení indexů u K_1 a K_2 se počet slov zmenší na polovinu (existují dva způsoby, jak prohodit písmena K_1 a K_2).
- Stejně dopadneme, když zrušíme indexy u písmen A_1 a A_2: existují dvě možnosti, jak tato písmena navzájem prohazovat $\Rightarrow$ počet slov se opět zmenší na polovinu.

Celkový počet možností: $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$.

Pedagogická poznámka: První příklad je potřeba se studenty vyřešit, další již zvládají téměř sami.

Př. 2: Kolik různých čtyřmístných čísel je možné vytvořit z cifer čísla 1211? Výsledek urči analogicky s předchozím příkladem a zkontroluj ještě libovolnou další metodou.

Analogicky s předchozím příkladem.
Čtyřmístné číslo = uspořádaná čtveřice ze čtyř cifer $\Rightarrow$ $4!$ možností.
Tři cifry jsou stejné (jedničky) $\Rightarrow$ jejich prohazováním ($3!$ možností) získáváme stejná čísla $\Rightarrow$ čísel je $3!$ krát méně, než kdyby byly cifry různé $\Rightarrow$ celkem $\frac{4!}{3!} = 4$ možnosti.
Jiná metoda:
Číslo vytvoříme, jakmile se rozhodneme, na kterou pozici umístíme 2 (zbytek doplníme jedničkami bez možnosti volby) $\Rightarrow$ čtyřmístné číslo $\Rightarrow$ čtyři možnosti, jak umístit cifru 2 $\Rightarrow$ 4 možnosti.

Př. 3: Kolika způsoby je možné rozdělit mezi deset dětí pět jablek, dvě hrušky a tři banány tak, aby každé dítě dostalo jeden kus ovoce?

Děti si můžeme na rozdělování postavit do řady $\Rightarrow$ ovoce přiřadíme tím, že ho rozestavíme do stejné řady.
Seřazujeme 10 kusů ovoce $\Rightarrow$ $10!$ možností, ale

- prohazováním pěti jablek mezi sebou se výsledné rozdání ovoce nezmění $\Rightarrow$ počet výsledků se zmenší $5!$ krát,
- prohazováním dvou hrušek mezi sebou se výsledné rozdání ovoce nezmění $\Rightarrow$ počet výsledků se zmenší $2!$ krát,
- prohazováním tří banánů mezi sebou se výsledné rozdání ovoce nezmění $\Rightarrow$ počet výsledků se zmenší $3!$ krát,

$\Rightarrow$ celkový počet možností: $\frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} = 2520$.

Př. 4: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Všechny předchozí příklady mají hodně společného:

- máme *n* různých prvků,
- z nich sestavujeme uspořádanou *k*-tici ($k \geq n$, kvůli opakování),
- záleží na pořadí,
- **prvky se mohou (ale nemusí) opakovat.**

k-tice, které jsme sestavovali, se nazývají **permutace s opakováním.**

> **Permutace s opakováním** z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou.

Při sestavování *k*-tice potřebujeme vědět, kolikrát se který prvek bude opakovat. Počet opakování jednotlivých prvků si označujeme čísly $k_1; k_2; ...; k_n$.

Př. 5: Urči konkrétní hodnoty proměnných *n*, *k*, $k_1; k_2; ...; k_n$ ve třetím příkladu. Co platí pro čísla *k*, $k_1; k_2; ...; k_n$?

Rozdávali jsme tři druhy ovoce $\Rightarrow$ $n = 3$,
rozdávali jsme deset kusů ovoce $\Rightarrow$ $k = 10$,
rozdávali jsme pět jablek $\Rightarrow$ $k_1 = 5$,
rozdávali jsme dvě hrušky $\Rightarrow$ $k_2 = 2$,
rozdávali jsme tři banány $\Rightarrow$ $k_3 = k_n = 3$.
Platí: $5 + 2 + 3 = 10$, počet kusů ovoce, které jsme rozdávali, získáme tím, že sečteme počet jablek, hrušek a banánů dohromady.
Obecně zřejmě platí: $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je podle mého názoru nutný. Samostatně ho vyřeší maximálně třetina nejlepších, ostatní mají problémy s určením *n*, *k* a samozřejmě k_n. Vyřešení následujícího příkladu je pak pro ně snadné a mohou pochopit předchozí definici.

Př. 6: Urči konkrétní hodnoty proměnných *n*, *k*, $k_1;k_2;...;k_n$ v prvním příkladu. Ověř platnost vztahu $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Ve slově KAJAK jsou tři různá písmena $\Rightarrow$ $n = 3$,
slovo KAJAK má pět písmen $\Rightarrow$ $k = 5$,
písmeno K je ve slově KAJAK dvakrát $\Rightarrow$ $k_1 = 2$,
písmeno A je ve slově KAJAK dvakrát $\Rightarrow$ $k_2 = 2$,
písmeno J je ve slově KAJAK jednou $\Rightarrow$ $k_3 = 1$.
Platí: $2+2+1=5$, počet písmen ve slově KAJAK získáme tím, že sečteme, kolikrát se ve slově vyskytují písmena K, A a J.

Pedagogická poznámka: Část žáků písmeno J nezapočítává (ve jmenovateli zlomku jsou pouze dva faktoriály), teprve zkontrolováním vztahu $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ se někteří z nich zamyslí. Na postoji ke kontrole je možné demonstrovat tři stupně uvažování:
ti nejlepší si součet $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ zkontrolují sami od sebe,
ti horší si součet zkontrolují kvůli požadavku v zadání a když kontrola nevyjde, začnou zkoumat, kde je problém,
ti matematicky neslabší zkontrolují součet kvůli požadavku a i když součet nevyjde, pokračují v klidu dál.

Počet *k*-členných permutací s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1;k_2;...;k_n$-krát značíme $P'(k_1;k_2;...;k_n)$.

Př. 7: Urči počet *k*-členných permutací s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1;k_2;...;k_n$-krát.

Celkem máme $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ prvků, které uspořádáváme $\Rightarrow$ $(k_1 + k_2 + ... + k_n)!$ možností.
Nyní musíme dělit pro každý prvek počtem možností, kterými můžeme prohazovat jeho výskyty:

- prvek 1 se vyskytuje k_1-krát $\Rightarrow$ $k_1!$ možností, jak tyto prvky prohazovat,
- prvek 2 se vyskytuje k_2-krát $\Rightarrow$ $k_2!$ možností, jak tyto prvky prohazovat,
- …
- prvek n se vyskytuje k_n-krát $\Rightarrow$ $k_n!$ možností, jak tyto prvky prohazovat,

$\Rightarrow$ celkem $\dfrac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$ možností.

Pedagogická poznámka: Studentům, kteří mají se sestavením vzorce problémy, většinou stačí připomenout, aby si na papír napsali řešení příkladu 3. Většina studentů píše vzorec ve tvaru $\dfrac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$, který je samozřejmě také správný, ale v tabulkách se nepoužívá. Na požádání pro ně není problém přepsat vzorec tak, aby se v něm

k nevyskytovalo.
Na tabuli sestavujeme i značení $P'(k_1;k_2;...;k_n)$.

Počet $P'(k_1;k_2;...;k_n)$ permutací s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1;k_2;...;k_n$-krát, je $P'(k_1;k_2;...;k_n)=\frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_n!}$

Př. 8: Kolika způsoby je možné mezi 30 studentů rozdat dvě volné vstupenky na koncert, pět vstupenek na plavecký stadión a deset vstupenek do posilovny, pokud každý ze studentů může dostat maximálně jednu vstupenku (i tak jich bude málo)?

Problém: Podobné zadání jako v příkladu 3, ale máme málo lístků, na některé studenty nic nezbude $\Rightarrow$ aby nebyli smutní, dostanou prázdné papírky $\Rightarrow$ vyřešeno.
Rozdáváme: 2 vstupenky na koncert, 5 lístků do bazénu, 10 lístků do posilovny a 13 prázdných lístků: $\frac{30!}{2!\cdot 5!\cdot 10!\cdot 13!} \doteq 4{,}89\cdot 10^{13}$ možností.

Pedagogická poznámka: Kromě menšiny, která dokáže příklad vyřešit samostatně, se objevují dvě špatná řešení. První mají vzorec $\frac{17!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}$ (těm připomínám, že studentů bylo 30 a ne 17), druzí pak $\frac{30!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}$ (ty upozorňuji, že jejich řešení neodpovídá vzorci pro počet permutací s opakováním, protože součet čísel ve jmenovateli se nerovná číslu v čitateli).
Při společné opravě na tabuli vyjdeme ze vzorce $\frac{17!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}$ a doplníme ho na správný výběrem 17 studentů, kteří dostanou nějaký lístek - $\binom{30}{17}$ možností $\Rightarrow$ správný výsledek $\binom{30}{17}\frac{17!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}$, upravíme
$\binom{30}{17}\frac{17!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}=\frac{30!}{17!\cdot 13!}\cdot\frac{17!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}=\frac{30!}{2!\cdot 5!\cdot 10!\cdot 13!}$ a pak přemýšlíme o významu členu $13!$ ve jmenovateli.

Př. 9: Je všeobecně známo, že nejúčinnějším zaklínadlem je formule ABRAKADABRA. Urči:
a) počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA a splést zaklínadlo,
b) počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena tak, aby žádná pětice sousedních písmen nebyla tvořena pěti písmeny A,
c) počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena tak, aby žádná dvojice sousedních písmen nebyla tvořena dvěma písmeny A.

a) počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA a splést zaklínadlo

Spočteme si, kolik písmen slovo obsahuje.
A 5x
B 2x
R 2x
K 1x
D 1x

Možnosti přemístění: $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=83160 \Rightarrow$ zaklínadlo lze splést

$\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}-1=83159$ způsoby (jedno z možných přemístění je správné).

b) žádná pětice sousedních písmen není tvořena pěti písmeny A
Všechna písmena A nesmí být vedle sebe $\Rightarrow$ mnoho různých možností $\Rightarrow$ snáz by se počítalo, kdy jsou všechna písmena A vedle sebe $\Rightarrow$ odečteme tento výsledek od všech možností.
Možnosti, kdy jsou všechna A vedle sebe (bereme je jako jeden znak):
AAAAA 1x
B 2x
R 2x
K 1x
D 1x

$\Rightarrow \frac{7!}{2!\cdot 2!}$

Všechna A nesmí být vedle sebe: $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{7!}{2!\cdot 2!}=81900$ možností.

c) žádná dvojice sousedních písmen není tvořena dvěma písmeny A
Dvě písmena A nesmí být vedle sebe $\Rightarrow$ písmena A musíme od sebe oddělovat pomocí zbývajících písmen, která máme k dispozici:
$\square B \square R \square K \square D \square B \square R \square$ máme šest zbývajících písmen $\Rightarrow$ existuje sedm míst (prázdné čtverečky), do kterých můžeme napsat jedno z pěti písmen A $\Rightarrow \binom{7}{5}$ možností jak napsat písmena A.
Souhlásky (zbývající písmena) můžeme prohazovat mezi sebou: $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ možností.
Ke každému rozmístění písmen A můžeme vystřídat všechny kombinace souhlásek $\Rightarrow$ možnosti kombinujeme $\Rightarrow$ celkem $\binom{7}{5}\frac{6!}{2!\cdot 2!}=3780$ možností.

Pedagogická poznámka: Bod a) předchozího příkladu spočítají všichni, bod b) jen menšina (často se vyskytující chybou je výsledek $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}-7$, ve kterém studenti uvažují pouze nad tím, kolik mají možností umístit mezi souhlásky spojené AAAAA a zapomínají, že mohou prohazovat mezi sebou také souhlásky. Bod c) přesahuje možnosti všech studentů, nemá tedy cenu příliš dlouho čekat a řešení zveřejňuji poměrně brzo.

Př. 10: Urči počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných devíti v jejichž zápisu se vyskytují pouze číslice 0, 2, 3, 5, 6.

Číslo je dělitelné devíti, právě když je ciferný součet dělitelný devíti $\Rightarrow$ nejdříve si zjistíme, jak ze zadaných číslic sestavit správný ciferný součet a pak zjistíme, kolik čísel je možné z každého takového seskupení sestavit.

Ciferný součet 9:

- $6+3+0+0=9$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 3, 0, 0 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula $\Rightarrow$ odečítáme $\frac{2\cdot 3!}{2}=3!$ možností (na začátku 0 (můžeme vybrat dvakrát) a další tři číslice můžeme uspořádat libovolně, počet možností dělíme dvěma, protože prohozením nul se nic nezmění) $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{2!}-3!=6$ možností.
- $5+2+2+0=9$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 5, 2, 2, 0 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula $\Rightarrow$ odečítáme $\frac{3!}{2!}$ možností (počet uspořádání číslic 5, 2, 2, 0 s nulou na začátku) $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$ možností.
- $3+3+3+0=9$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 3, 3, 3, 0 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{3!\cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula $\Rightarrow$ odečítáme 1 možnost (nulu na začátku a tři trojky za ní) $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{3!\cdot 1!}-1=3$ možnosti.
- $3+2+2+2=9$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 3, 2, 2, 2 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{3!\cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula $\Rightarrow$ nic neodečítáme $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$ možnosti.

Ciferný součet 18:

- $6+6+6+0=18$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 6, 6, 0 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{3!\cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula $\Rightarrow$ odečítáme 1 možnost (nulu na začátku a tři šestky za ní) $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{3!\cdot 1!}-1=3$ možnosti.
- $6+6+3+3=18$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 6, 3, 3 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ možností, mezi čísly není nula $\Rightarrow$ nic neodečítáme $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ možností.
- $6+5+5+2=18$ $\Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 5, 5, 2 $\Rightarrow$ $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula $\Rightarrow$ nic neodečítáme $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{2!}=12$ možností

- $5+5+5+3=18 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 5, 5, 5, 3 $\Rightarrow \frac{4!}{3!\cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula $\Rightarrow$ nic neodečítáme $\Rightarrow$ celkově $\frac{4!}{3!}=4$ možnosti.

Dohromady máme $6+9+3+4+3+6+12+4=47$ možností jak sestavit číslo tak, aby bylo dělitelné devíti.

Na závěr si zkusíme spočítat $P'(k,n-k)=\frac{[k+(n-k)]!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}=K_k(n)$. Tedy počet permutací s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje *k*-krát a druhý $(n-k)$-krát, je stejný jako počet *k*-prvkových kombinací z *n* prvků.

Př. 11: (BONUS) Najdi kombinatorické zdůvodnění vzorce $P'(k,n-k)=K_k(n)$.

Vytváření *k*-prvkové kombinace z *n* prvků si můžeme představit takto:
Máme *n* prvků a tedy $n!$ možností jak se postavit do řady, prvních *k* pozic v této řadě, znamená, že prvek je vybrán do kombinace, zbývajících $(n-k)$ prvků znamená, že prvek vybrán nebyl $\Rightarrow$ pokud nás zajímá výsledek výběru do kombinace, musíme počet $n!$ možností postavení do řady vydělit:

- $k!$ možností, jak proházet mezi sebou prvky na prvních *k* místech (jejich proházení neovlivní výběr do kombinace),
- $(n-k)!$ možností, jak proházet mezi sebou prvky na zbývajících $(n-k)$ místech (jejich proházení neovlivní výběr do kombinace),

$\Rightarrow$ celkem $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ možností, jak sestavit kombinaci.

Př. 12: Petáková:
strana 148/cvičení 73

Shrnutí: